

Wydział Odlewnictwa

Wirtualizacja procesów odlewniczych

Katedra Informatyki Stosowanej WZ AGH



Metody symulacji komputerowej

Projektowanie informatycznych
systemów zarządzania produkcją

Treść wykładu

- Co to jest symulacja
- Zalety i wady symulacji
- Przebieg symulacji
- Metoda Monte Carlo
- Statystyczne aspekty symulacji
- Układ komputerowego eksperymentu symulacyjnego
- Przykładowe problemy

Wprowadzenie

Symulacja - słownik języka polskiego:

- stwarzanie fałszywych pozorów, udawanie, zmyślanie czegoś, pozór, fikcja,
- sztuczne odtwarzanie (np. w warunkach laboratoryjnych, często przy pomocy maszyn cyfrowych) właściwości danego obiektu, zjawiska lub przestrzeni występujących w naturze, lecz trudnych do obserwacji, zbadania, powtórzenia.

Pojęcie symulacji

Jest to metoda polegająca na badaniu zachowania się systemu przy użyciu modeli. Pod pojęciem systemu rozumiemy pewien zbiór powiązanych ze sobą obiektów scharakteryzowanych przy pomocy atrybutów (cech), które również mogą być ze sobą powiązane. Zakładamy, że ich struktura nie podlega zmianom, a jedynie cechy poszczególnych obiektów mogą przyjmować różne wartości w kolejnych chwilach czasu tzn. system osiąga kolejne stany pod wpływem zachodzących zdarzeń.

Pojęcie symulacji

Innymi słowy symulacja jest metodą prowadzenia eksperymentu, w którym decydent buduje model imitujący (naśladujący) działanie rzeczywistego systemu. Poprzez eksperymenty z modelem, decydent może studiować charakterystykę i zachowanie się tegoż systemu w czasie. Jeżeli używamy modeli matematycznych mówimy o symulacji numerycznej.

Czasem terminem tym określa się pewne typy iteracyjnych procedur obliczeniowych, w których często pobierane są próbki z rozkładów, lecz czynnik czasu nie odgrywa zasadniczej roli. Jest to tzw. metoda Monte Carlo.

Modele symulacyjne

- ❑ Druga połowa lat 70. - prognoza, że przewozy główną linią CNR (Canadian National Railway) podwoją się w następnej dekadzie. Przewidywano konieczność wydania 2,2 mld CAD, z tego 1,3 mld na zbudowanie drugiego toru. Kosztem 300 tys. CAD zbudowano model symulacyjny i przeprowadzono nań eksperymenty. Okazało się, że nie wszędzie potrzebne są 2 tory: nie wybudowano odcinka o długości 128 mil. Efekt: oszczędność około 300 mln CAD.

Modele symulacyjne

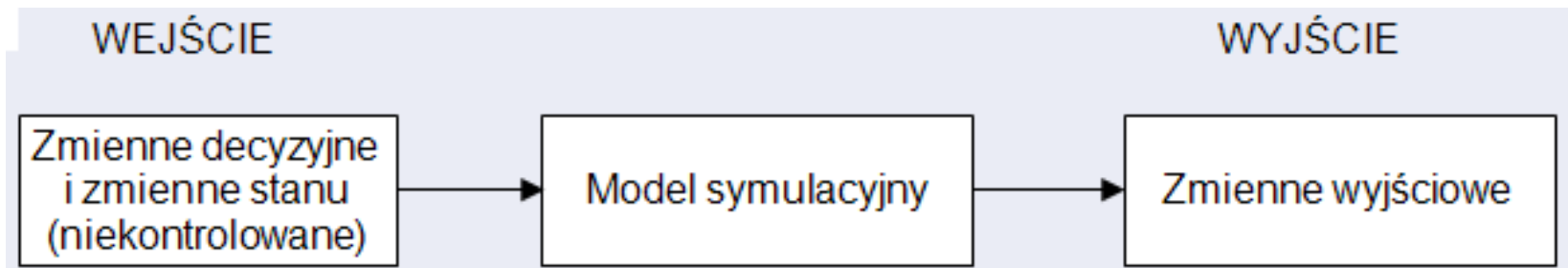
- ❑ Technika symulacji jest szeroko używana w biznesie i w instytucjach rządowych. Wg źródeł amerykańskich około 85% organizacji używa różnego rodzaju modeli symulacyjnych. Symulacja przybiera najróżniejsze formy od modelowania prostych systemów dla celów zarządzania operacyjnego (zapasy, produkcja, finanse, obsługa), poprzez gry menadżerskie, do modelowania wielkich systemów (korporacje, ekonomia światowa, pogoda).

Modele symulacyjne

- Większość modeli numerycznych zawiera dane wejściowe, zmienne decyzyjne i dane wyjściowe.

Dane wejściowe wprowadzają do modelu wartości stałe w trakcie pojedynczego eksperymentu, zmienne decyzyjne to zmienne kontrolowane przez decydenta.

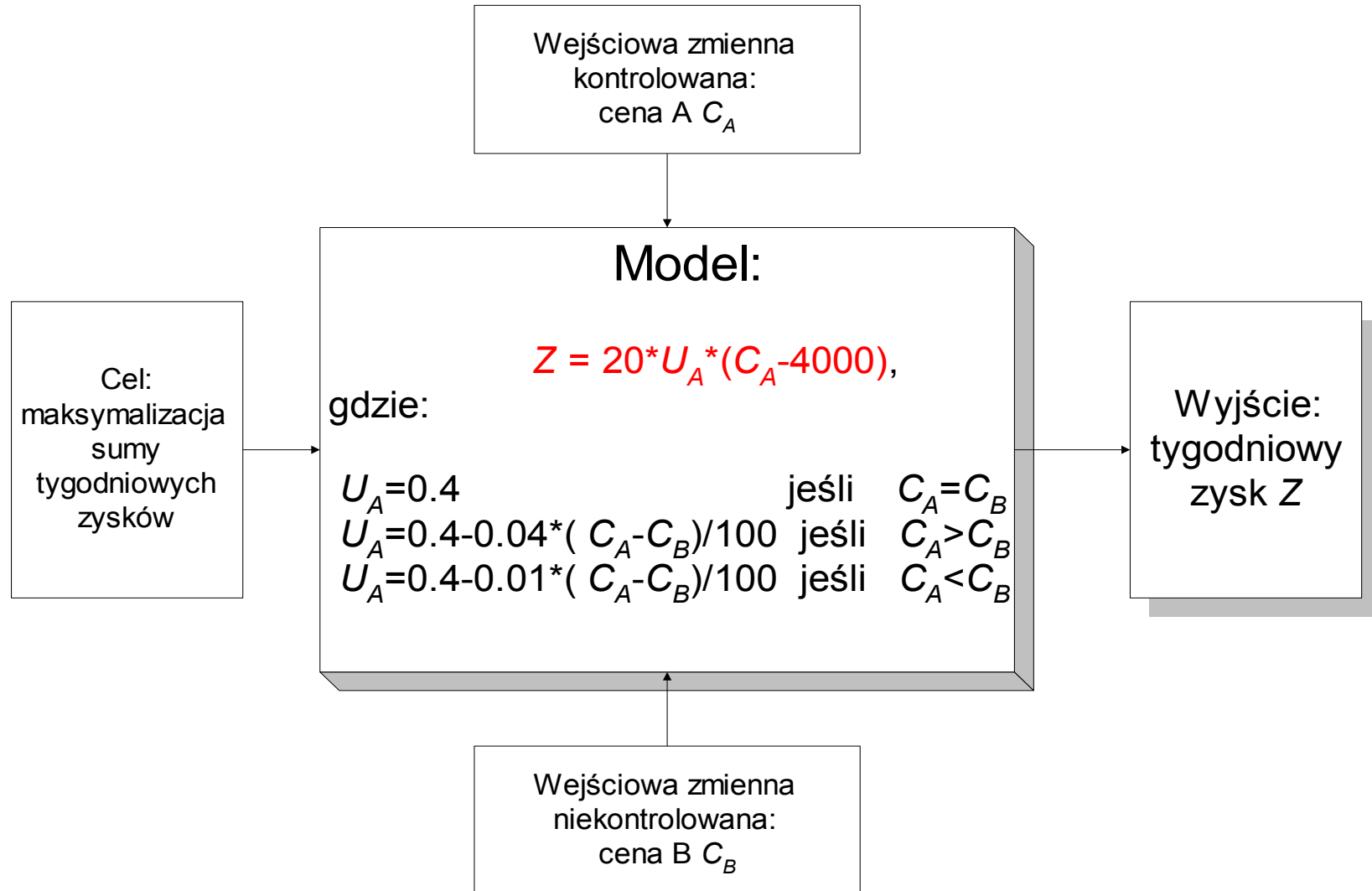
Dane wyjściowe są określone przez dane wejściowe i decyzyjne i służą do wyboru pewnej kombinacji wartości zmiennych decyzyjnych, najlepszych z punktu widzenia rozwiązania problemu.



Modele symulacyjne

- ❑ Firma A konkuruje z firmą B na lokalnym rynku w sprzedaży pokryć dachowych. Badania wykazały, że chłonność rynku wynosi 1040 szt. rocznie. Sugerowana cena detaliczna wynosi 5000 zł, a cena zakupu od producenta - 4000 zł (dla obu firm).
- ❑ Dyrektor firmy A chce znać cenę, która pozwoli na **maksymalizację rocznego zysku**. Nie jest to proste, gdyż udział A w rynku zależy od stosunku cen A i B. Firma B zmienia ceny bez uprzedzenia z tygodnia na tydzień.
- ❑ Jeśli obie firmy mają jednakowe ceny, A ma 40% udział w rynku. Jeżeli B ma niższą cenę, A traci z tego poziomu 4% udziału za każde 100 zł różnicy, gdy sytuacja jest odwrotna, A zyskuje 1% udziału za każde 100 zł różnicy.

Modele symulacyjne



Przykładowy problem

- ❑ **Ile kas ma być czynnych w banku?**
- ❑ Identyfikacja głównych obiektów systemu: **stanowiska obsługi i klienci.**
- ❑ Zdefiniowanie każdej operacji:
 - **do systemu przybywa klient** - w jaki sposób, np. wg rozkładu Poissona o określonej średniej lub zgodnie z danymi empirycznymi.
 - **klient wybiera kolejkę** - w jaki sposób: z reguły najkrótszą a jeśli są jednakowo długie - wg innych kryteriów.
 - **przesuwanie się kolejki** - reguła FIFO, czas obsługi losowany z rozkładu empirycznego lub np. normalnego z daną średnią i odchyleniem.
 - **klient opuszcza system.**

Przykładowy problem

- ❑ **Ile kas ma być czynnych w banku?**
- ❑ Symulację tego systemu zaczynamy od wylosowania momentu przybycia pierwszego klienta. Posyłamy go do wybranej wg jakiejś reguły kasy, gdzie jest natychmiast obsłużony. Wyznaczamy czas jego obsługi losując z odpowiedniego rozkładu i notujemy moment zakończenia. Następnie losujemy czas przybycia następnego klienta itd. Na każdym etapie musimy uważać, by we właściwej chwili wprowadzić każdego klienta, usunąć go z systemu, uaktualnić kolejkę po zakończeniu każdej obsługi.
- ❑ W miarę trwania symulacji obliczamy też statystyki np. średni czas oczekiwania, średnia długość kolejki, łączny czas bezczynności osób pracujących w kasie.

Przykładowy problem

- ❑ **Ile kas ma być czynnych w banku?**
- ❑ Ta prosta sytuacja ilustruje najważniejsze cechy symulacji:
 - mechanizm przesuwania czasu, aby przejść do następnego zdarzenia (przybycie klienta, obsługa, czas zakończenia obsługi),
 - określone reguły kierowania zmianami w systemie,
 - pobieranie próbek z rozkładów.

Metoda Monte Carlo

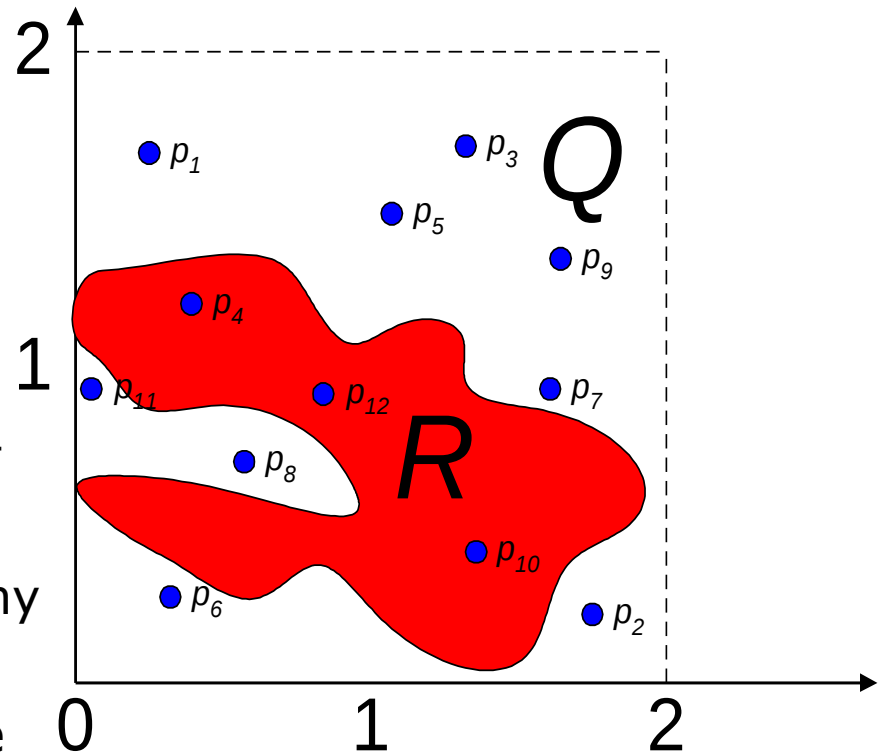
- Metoda Monte Carlo to każda metoda wymagająca użycia zachowania losowego do rozwiązywania problemu. Metody te są stosowane do szerokich klas problemów deterministycznych i probabilistycznych. Problemy deterministyczne to np. rozwiązywanie równań różniczkowych, znajdowanie pól i objętości, odwracanie macierzy czy obliczanie wartości π . Zastosowania probabilistyczne dotyczą symulacji procesów, które istotnie zawierają zmienne losowe, np. symulacja połączeń telefonicznych przez centralę czy obsługa samochodów na stacji benzynowej.

Metoda Monte Carlo

- ❑ Zastosowanie metody Monte Carlo do problemów deterministycznych opiera się na prawie wielkich liczb Bernoulliego:
częstość występowania zdarzenia w n próbach jest zbieżna do prawdopodobieństwa tego zdarzenia, gdy n dąży do nieskończoności.
- ❑ Wychodząc z tego twierdzenia, metoda Monte Carlo może być zastosowana np. do całkowania dowolnych funkcji.
- ❑ Całkowanie numeryczne oparte na definicji Riemanna jest bardzo dobrą techniką aproksymacji całki z żądaną dokładnością. Zawodzi jednak w przypadku całek nad skomplikowanymi obszarami przestrzeni wielowymiarowych.

Metoda Monte Carlo

- ❑ Załóżmy, że mamy daną część R płaszczyzny poprzez określenie jej brzegów jako relacji między dwoma zmiennymi. Chcemy obliczyć pole powierzchni R .
- ❑ Wychodzimy od części płaszczyzny Q , która zawiera R , a której pole jest łatwo obliczyć (Q jest zwykle kwadratem). Używając generatora liczb losowych losujemy punkty $p_1, p_2, \dots, p_n$ z obszaru Q . Dla każdego punktu p_i sprawdzamy, czy leży on w obszarze R , jednocześnie je zliczając. Liczbę tych punktów oznaczmy $P(n)$.



Dlaczego symulacja

- ❑ Jest dobrze dostosowana do problemów, które są trudne lub wręcz niemożliwe do analitycznego rozwiązania.
- ❑ **Możliwość analizy „what if”**. Modele optymalizacyjne odpowiadają na pytanie, jakie wartości zmiennych decyzyjnych są najlepsze dla przyjętej funkcji celu. Przyczyną powstania trudności jest zwykle złożoność rozpatrywanego modelu. Zastosowanie zwykłych metod analitycznych wymaga przyjęcia nierealistycznych założeń i uproszczeń. W tej sytuacji decydent może woleć określić zbiór decyzji, symulować rezultaty i obserwować, co się dzieje z kryterium.
- ❑ Realistyczne założenia (dokładne rozwiązanie przybliżonego modelu czy przybliżone rozwiązanie dokładnego modelu).

Dlaczego symulacja

- ❑ **Łatwa w użyciu.** Symulacja nie wymaga skomplikowanego aparatu matematycznego. Decydent, który zna strukturę systemu może bez trudu opracować jego model przy użyciu aplikacji menedżerskich (np. arkusz kalkulacyjny). Model opisuje problem z punktu widzenia decydenta, który w łatwy sposób może go zrozumieć i kontrolować.

Dlaczego symulacja

- ❑ **Kontrolowany eksperyment.** Model symulacyjny *explicite* pokazuje najważniejsze relacje w rozważanym problemie. Dlatego decydenci używają modeli do systematycznego szacowania proponowanych polityk w symulowanych warunkach i do oceny wpływu kluczowych elementów na system. Eksperymenty te prowadzone są bez naruszania działania aktualnego systemu. Można w ten sposób uniknąć decyzji prowadzących do fatalnych następstw ekonomicznych, politycznych czy socjalnych.

Dlaczego symulacja

- ❑ **Kompresja czasu.** Eksperyment, który w rzeczywistym systemie trwałby miesiące czy lata, można przeprowadzić w ciągu kilku minut przy użyciu jego symulacyjnego modelu.
- ❑ **Laboratorium zarządzania.** Model ilustruje i pozwala lepiej poznać rzeczywisty proces. Gry kierownicze pozwalają uczestnikom zrozumieć relacje między zmiennymi decyzyjnymi a rezultatami oraz rozwinać umiejętności decyzyjne.

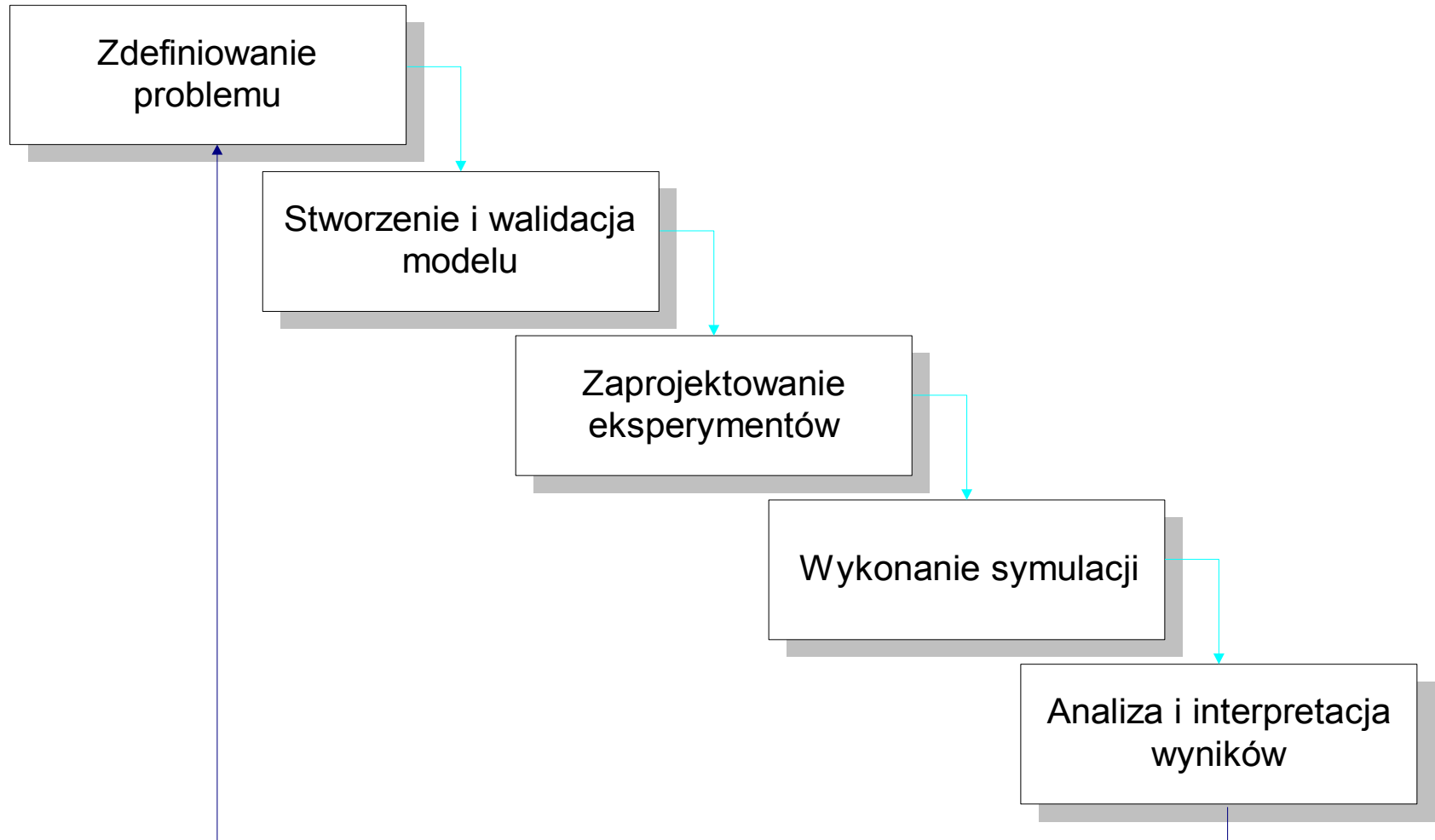
Ograniczenia symulacji

- ❑ **Nie gwarantuje optymalnego rozwiązania.** Podczas eksperymentu badane są tylko warianty podane przez użytkownika. Zawsze mogą istnieć lepsze układy zmiennych decyzyjnych, których decydent nie wziął pod uwagę i/lub o których nie ma pojęcia.
- ❑ **Kosztowna.** Modelowanie złożonego systemu, wykonywanie wielu obserwacji oraz pisanie programów jest bardzo pracochłonne nawet przy użyciu wyspecjalizowanych narzędzi. W celu oszacowania pojedynczej statystyki należy wielokrotnie powtarzać przebieg symulacji.

Ograniczenia symulacji

- ❑ **Pozorna łatwość stosowania.** Często istnieje pokusa by stosować ją tam, gdzie można wyznaczyć rozwiązanie optymalne przy użyciu metod analitycznych. Ponadto nadmiar szczegółów wbudowanych w model może utrudnić przeprowadzenie eksperymentów.
- ❑ **Kiedy nie stosować symulacji.**
 - Wiedza o wyjściach jest niedostępna, niewiarygodna lub trudna do zebrania (GIGO),
 - Problem można rozwiązać analitycznie,
 - Zakres swobody w podejmowaniu decyzji jest zbyt szeroki.

Przebieg symulacji



Przebieg symulacji

- ❑ **Zdefiniowanie problemu.**

Zawiera przede wszystkim cele projektu i określenie przyczyn stosowania symulacji. Użytkownik powinien zdefiniować zarówno atrybuty interesujących cech jak i miary jakości rozwiązania.

Ponadto należy określić zakres projektu i pożądany poziom szczegółowości.

- ❑ **Przykład: bank.**

Przebieg symulacji

□ Stworzenie i walidacja modelu.

Ogólnie rzecz biorąc model identyfikuje kluczowe elementy problemu oraz ich relacje i ma przetransformować niekontrolowane i kontrolowane (decyzyjne) wejścia w zamierzone dane wyjściowe. Jeśli możemy dokładnie opisać zmienne niekontrolowane to mówimy o symulacji **deterministycznej**, jeśli zmienne te są opisane rozkładami statystycznymi - o symulacji **probabilistycznej**. Zmienne mogą mieć charakter **dyskretny** lub **ciągły**.

Przebieg symulacji

❑ Stworzenie i walidacja modelu.

Estymacji parametrów modelu dokonuje się na podstawie bezpośrednich obserwacji lub danych historycznych.

Parametry te i założenia modelu powinny być zweryfikowane przez doświadczonych użytkowników lub ekspertów.

Po oprogramowaniu modelu, należy go zweryfikować statystycznie wprowadzając doń dane historyczne. W razie potrzeby należy model przebudować.

Przebieg symulacji

■ Stworzenie i walidacja modelu.

Do oceny adekwatności stosuje się między innymi następujące testy:

- obserwację pracującego modelu przez osoby niezwiązane z opracowaniem tego modelu,
- prześledzenie w odwrotnym kierunku toku rozumowania przyjętego w trakcie opracowywania modelu,
- sprawdzenie, czy model nie generuje absurdalnych wyników dla typowych danych wejściowych,
- sprawdzenie, czy otrzymane wyniki mają sens i czy istnieje ich interpretacja w rzeczywistym systemie.

- Jeśli wiarygodność modelu nie zostanie podważona, model taki jest uważany za adekwatny i nadaje się do eksploatacji.

Przebieg symulacji

❑ Zaprojektowanie eksperymentu.

W projekcie eksperymentu należy przede wszystkim określić warunki początkowe (przykład: bank, skrzyżowanie). Jako że eksperyment ma dostarczyć odpowiedzi na pytania decydenta, należy ponadto przewidzieć wszystkie interesujące użytkownika wartości zmiennych decyzyjnych, dla których będą prowadzone oddzielne przebiegi.

Przebieg symulacji

- ❑ Wykonanie symulacji.
- ❑ W przypadku symulacji deterministycznej prowadzimy tylko jeden przebieg dla każdej wartości zmiennej kontrolowanej.
- ❑ W przypadku symulacji probabilistycznej wartości zmiennych niekontrolowanych są losowane z odpowiednich rozkładów, stąd każdy przebieg daje inne wyniki. By wyniki były statystycznie wiarygodne należy przeprowadzić kilkadziesiąt przebiegów dla każdej wartości zmiennej decyzyjnej.

Przebieg symulacji

❑ Analiza rezultatów.

Analiza obejmuje porównanie symulowanych wyników otrzymanych z wyspecyfikowanych polityk. Ponieważ w przypadku symulacji probabilistycznej mamy do czynienia z rozkładem wyników, należy stosować narzędzia statystyczne (analiza wariancji, analiza spektralna i testy istotności) do oceny otrzymanych wyników. Z reguły analiza wystarcza do wyboru najlepszej polityki spośród zbadanych. Czasem wyniki wskazują, że potrzebne są dalsze badania (ze zmianą modelu włącznie).

Aspekty statystyczne symulacji

- ❑ We wszystkich symulacjach probabilistycznych występują elementy losowe (rozkład cen, czasy obsługi itp.). Dlatego wynik symulacji nie jest dokładną odpowiedzią, lecz szeregiem liczb o losowym rozkładzie.
- ❑ W symulacjach występuje wiele problemów statystycznych, specyficznych i nie - dla tej metody:
 - wygenerowanie ciągu liczb losowych o zadanym rozkładzie opisującym zmienną losową,
 - statystyczna analiza modelu,
 - statystyczna analiza wyników.

Liczby losowe

- ❑ W przypadku symulacji stochastycznej podstawowe znaczenie ma generowanie liczb z rozkładu jednostajnego, gdyż przez jego przekształcenie można uzyskać liczby losowe o dowolnym rozkładzie.
- ❑ Rozkład jednostajny to taki rozkład, w którym prawdopodobieństwa wylosowania dowolnej wartości z danego przedziału (np. $[0...1]$) są sobie równe.
- ❑ **Losowy** oznacza, że nie da się przewidzieć, jakie liczby otrzymamy.

Pobieranie próbek z rozkładów

- ❑ Wykonując operacje matematyczne na liczbach losowych o rozkładzie równomiernym $[0, 1]$, można tworzyć liczby losowe o innych rozkładach.
- ❑ Ciąg liczb $R' = 1 - R$ ($R = \{r_i\}$) ma też rozkład jednostajny w przedziale $[0, 1]$ i nazywany jest **ciągiem przeciwnym**. Ciągi takie są ważnym środkiem zmniejszania wariancji w symulacjach stochastycznych.

Pobieranie próbek z rozkładów

❑ Zmienne losowe o danym rozkładzie dyskretnym

Wykonujemy mapowanie liczb losowych z przedziału $[0, 1]$ na dystrybuantę:

- określ prawdopodobieństwa, że zmienna przybiera określone wartości,
- utwórz dystrybuantę (skumuluj prawdopodobieństwa),
- przyporządkuj przedziały liczb losowych do dystrybuanty,
- wylosuj liczbę z $[0, 1]$,
- znajdź tę liczbę w przedziałach dystrybuanty,
- odczytaj wartość zmiennej, której przyporządkowano ten przedział.

Pobieranie próbek z rozkładów

■ Zmienne losowe o danym rozkładzie dyskretnym – przykład

Lp	Cena	Prawdopodobieństwo	Dystrybuanta
1	4 600	0,15	0,15
2	4 700	0,19	0,34
3	4 800	0,30	0,64
4	4 900	0,26	0,90
5	5 000	0,10	1,00
	4 797	1,00	

Lp	L.losowa
1	0,14
2	0,67
3	0,48
4	0,91
5	0,53
6	0,09
7	0,61
8	0,24
9	0,94
10	0,55

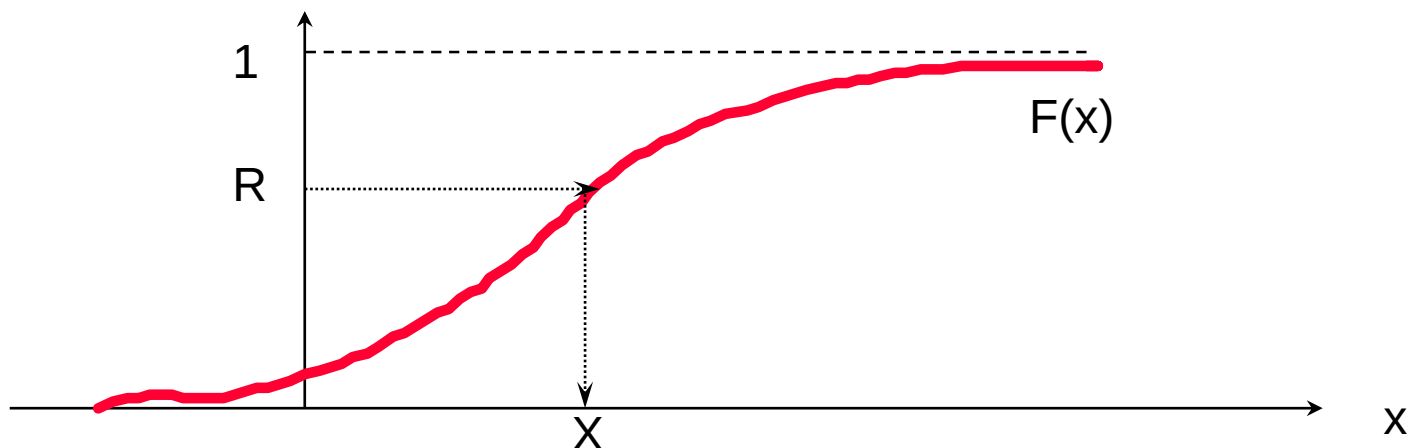
Dystrybuanta	Cena rzecz.
0,15	4 600
0,34	4 700
0,64	4 800
0,90	4 900
1,00	5 000

Cena wyl.
4 600
4 900
4 800
5 000
4 800
4 600
4 800
4 700
5 000
4 800

Pobieranie próbek z rozkładów

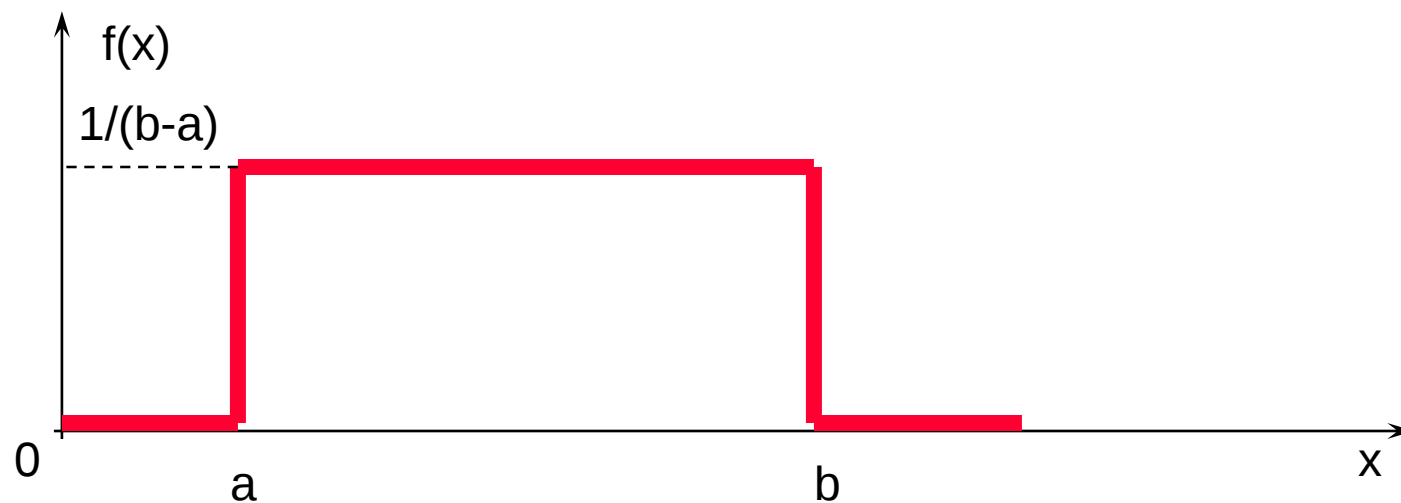
□ Zmienne losowe o danym rozkładzie ciągłym

Ogólna metoda polega na odwróceniu dystrybuanty $F(x)$. Weź liczbę losową R o rozkładzie jednostajnym w przedziale $[0, 1]$ i rozwiąż równanie $F(X) = R$ lub $F(X) = 1-R$. Wtedy X ma szukany rozkład i nazywa się *liczbą losową o dystrybuancie $F(x)$* .



Pobieranie próbek z rozkładów

- Rozkład prostokątny w przedziale $[a, b]$



- $P = a + (b-a) \cdot R$ ma rozkład prostokątny w $[a, b]$.

Pobieranie próbek z rozkładów

□ Liczby losowe o rozkładzie wykładniczym

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$, wartość oczekiwana $1/\lambda$)

Weź liczbę losową R o rozkładzie jednostajnym w przedziale $[0, 1]$ i oblicz $X = -\ln(R)/\lambda$.

□ **Dowód**

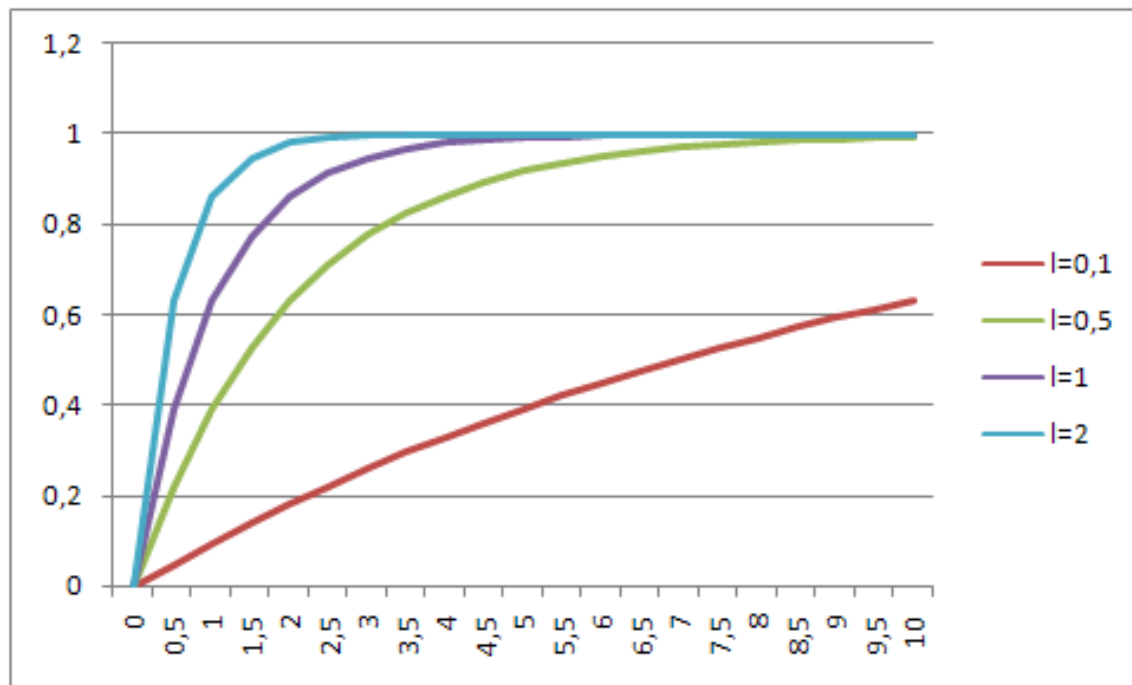
$$F(X) = 1 - R$$

$$1 - e^{-\lambda X} = 1 - R$$

$$e^{-\lambda X} = R$$

$$-\lambda X = \ln(R)$$

$$X = -\ln(R)/\lambda$$



Pobieranie próbek z rozkładów

❑ Liczby losowe o rozkładzie normalnym

Przy użyciu dwóch niezależnych liczb losowych R_1 i R_2 o rozkładzie jednostajnym w $[0, 1]$ można otrzymać dwie niezależne liczby losowe o rozkładzie normalnym $N(0,1)$. Jest to tzw. przekształcenie *Boxa-Müllera*:

$$N_1 = (-2 \ln(R_1))^{1/2} \cos(2\pi R_2)$$

$$N_2 = (-2 \ln(R_1))^{1/2} \sin(2\pi R_2)$$

- ❑ Tworząc liczby $m + \sigma N_1$ i $m + \sigma N_2$ otrzymujemy zmienne losowe o rozkładzie $N(m, \sigma)$.

Przykład symulacji jednokanałowej kolejki

Założmy, że czas przybycia klienta i czas obsługi są opisane następującymi rozkładami empirycznymi:

Czas przybycia	Prawd.	Dystrybuanta	Czas obsługi	Prawd.	Dystrybuanta
1	0,10	0,10	1	0,30	0,30
2	0,20	0,30	2	0,20	0,50
3	0,25	0,55	3	0,20	0,70
4	0,20	0,75	4	0,15	0,85
5	0,15	0,90	5	0,10	0,95
6	0,10	1,00	7	0,05	1,00
3,40	1,00		2,75	1,00	

Przykład symulacji jednokanałowej kolejki

Model:

Klient nr.	L.los.	Czas przybycia	Wejście do systemu CLOCK1	Początek obsługi CLOCK2	L.los.	Czas obsługi T	Koniec obsługi CLOCK3	Czas oczekiwania klienta	Czas bezczynności kanału
1			0	0	0,82	4	4	0	0
2	0,38	3	3	4	0,64	3	7	1	0
3	0,15	2	5	7	0,59	3	10	2	0
4	0,22	2	7	10	0,46	2	12	3	0
5	0,97	6	13	13	0,77	4	17	0	1
6	0,42	3	16	17	0,89	5	22	1	0
7	0,28	2	18	22	0,55	3	25	4	0
8	0,23	2	20	25	0,12	1	26	5	0
9	0,21	2	22	26	0,48	2	28	4	0
10	0,66	4	26	28	0,58	3	31	2	0
		2,89				3,00		2,20	0,10

Czas przybycia	Prawd.	Dystrybuanta	Czas obsługi	Prawd.	Dystrybuanta
1	0,10	0,10	1	0,30	0,30
2	0,20	0,30	2	0,20	0,50
3	0,25	0,55	3	0,20	0,70
4	0,20	0,75	4	0,15	0,85
5	0,15	0,90	5	0,10	0,95
6	0,10	1,00	7	0,05	1,00
3,40	1,00		2,75	1,00	

Symulacja wydatków inwestycyjnych

Spółka planuje budowę linii odlewniczej; oczekiwane nakłady są zestawione w poniższej tabeli :

Kategoria	Wydatki [tys. zł]
Projekt	510
Urządzenia	4 900
Posadowienie	830
Infrastruktura	1 600
Płace	610
Inne	650
Razem	9 100

Jakie jest prawdopodobieństwo, że nakłady na projekt wyniosą dokładnie 9 100 000,00 zł?

Symulacja wydatków inwestycyjnych

Potrzebne są dokładniejsze dane:

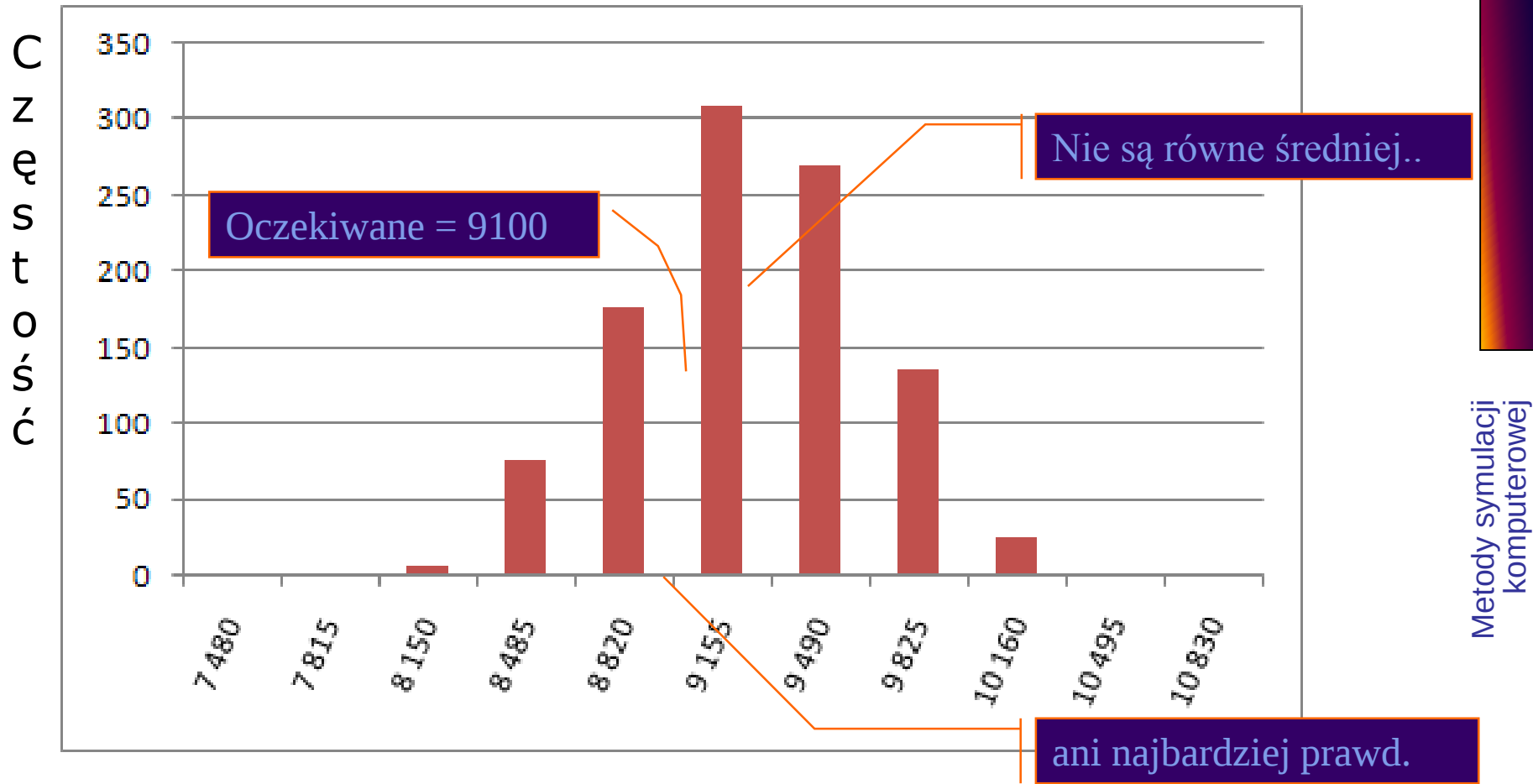
Kategoria	Wydatki [tys. zł]			
	Optymistyczne	Najbardz. prawd.	Pesymistyczne	Oczekiwane
Projekt	450	500	580	510
Urządzenia	4 000	5 000	5 700	4 900
Posadowienie	700	790	1 000	830
Infrastruktura	1 300	1 500	2 000	1 600
Płace	580	600	650	610
Inne	450	600	900	650
Razem	7 480	8 990	10 830	9 100

Jakie jest prawdopodobieństwo, że nakłady na projekt
wyniosą dokładnie 9 100 000,00 zł?

Zbuduj prosty model i wykonaj symulację Monte Carlo.

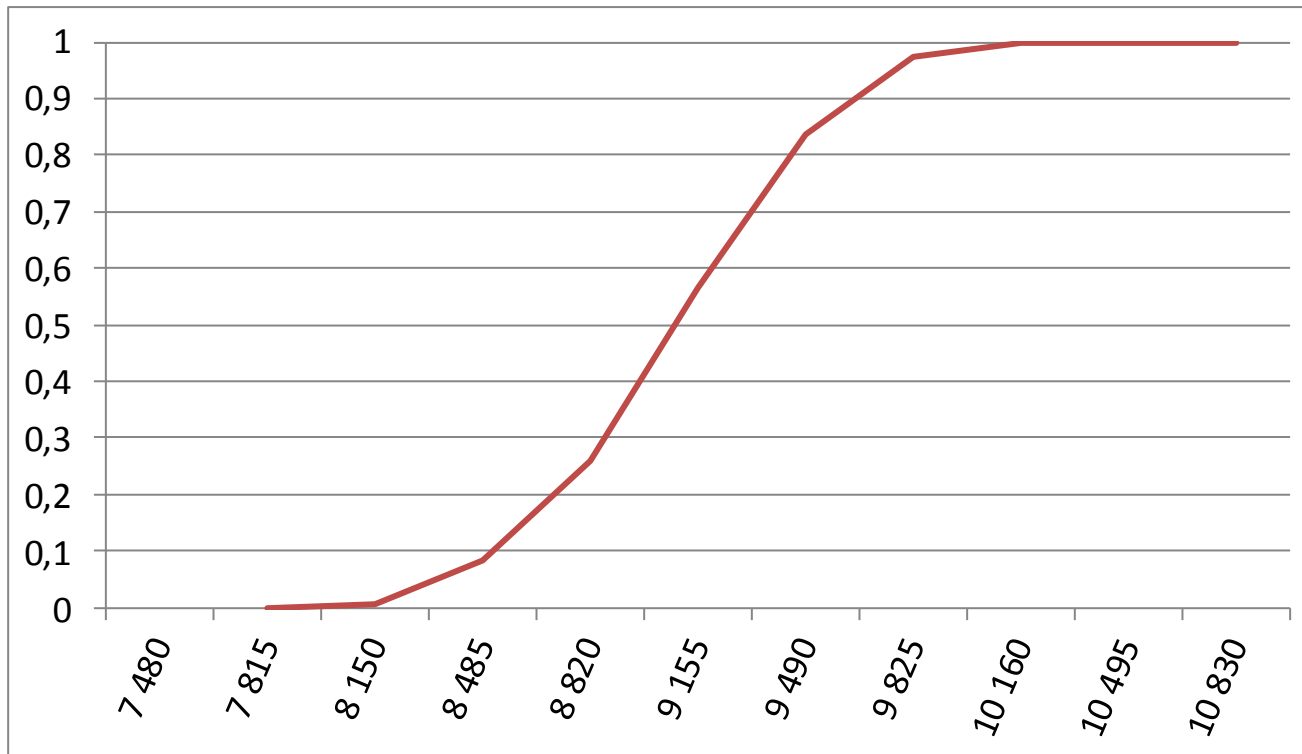
Symulacja wydatków inwestycyjnych

Jeśli na wejściu masz rozkłady, to na wyjściu otrzymasz również rozkład:



Symulacja wydatków inwestycyjnych

Dystrybuanta:



Symulacja systemu konserwacji

W budynku zainstalowano 1000 żarówek. Każda żarówka ma trwałość co najwyżej 12 miesięcy. Firma konserwująca budynek stara się zdecydować, czy warto stosować politykę „grupowej wymiany”. W ramach tej polityki wszystkie żarówki są wymieniane co m miesięcy (gdzie m jest do ustalenia). Żarówki są również wymieniane pojedynczo, kiedy się spalą. Załóżmy, że wymiana jednej żarówki kosztuje 0,15 zł w przypadku wymiany grupowej i 0,80 zł, jeśli wymieniana jest spalona żarówka.

Jak można użyć symulacji w celu ustalenia, czy warto stosować politykę wymiany grupowej?

Źródło: Winston W., Albright S.: Practical management science. Duxbury, 2001.