

Wydział Zarządzania AGH

Katedra Informatyki Stosowanej



Symulacja komputerowa

Statystyczne aspekty symulacji

Statystyczne aspekty symulacji

- ❑ Przykładowy problem
- ❑ Weryfikacja i walidacja modelu
- ❑ Analiza symulacji statycznej
- ❑ Liczba eksperymentów
- ❑ Porównywanie wariantów decyzyjnych
- ❑ Metody redukcji wariancji

Przykładowy problem

- ❑ Firma A konkuruje z firmą B na lokalnym rynku w sprzedaży pokryć dachowych. Badania wykazały, że chłonność rynku wynosi 1040 szt. rocznie. Sugerowana cena detaliczna wynosi 5000 zł, a cena zakupu od producenta - 4000 zł (dla obu firm).
- ❑ Dyrektor firmy A chce znać cenę, która pozwoli na **maksymalizację rocznego zysku**. Nie jest to proste, gdyż udział A w rynku zależy od stosunku cen A i B. Firma B zmienia ceny bez uprzedzenia z tygodnia na tydzień.
- ❑ Jeśli obie firmy mają jednakowe ceny, A ma 40% udział w rynku. Jeżeli B ma niższą cenę, A traci z tego poziomu 4% udziału za każde 100 zł różnicy, gdy sytuacja jest odwrotna, A zyskuje 1% udziału za każde 100 zł różnicy.

Przykładowy problem

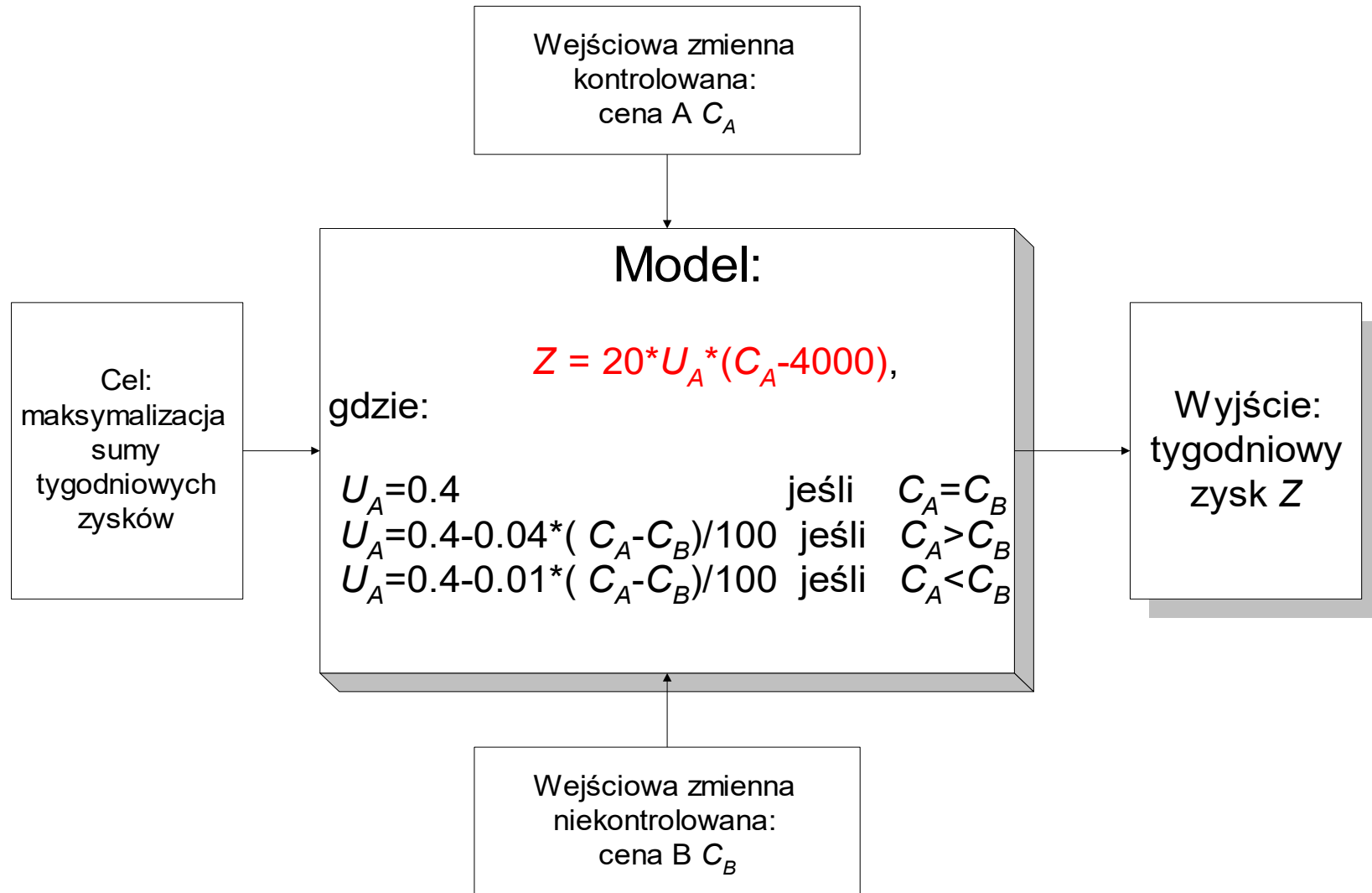
- W opisanej sytuacji firma A zna potencjalną rozpiętość cen konkurenta, ale nie ma pewności co do dokładnej jej wartości. Jako że niekontrolowana zmienna wejściowa jest niepewna, model konkurencji cenowej firm A i B jest *de facto* modelem stochastycznym. Szczególnie w tej sytuacji symulacja może być wartościowym narzędziem podejmowania decyzji. W tym wypadku konieczne jest generowanie zmiennej wejściowej zgodnie z rzeczywistym rozkładem prawdopodobieństwa.

Przykładowy problem

- Na podstawie danych historycznych zarząd A oszacował rozkład cen firmy B:

Lp	Cena B	Prawdopodobieństwo
1	4 100	0,02
2	4 200	0,04
3	4 300	0,08
4	4 400	0,10
5	4 500	0,13
6	4 600	0,15
7	4 700	0,25
8	4 800	0,17
9	4 900	0,06
Średnia	4 594	1,00

Przykładowy problem – model



Weryfikacja i walidacja modelu

- ❑ Weryfikacja - czy poprawnie zbudowano model:
 - czy parametry wejściowe są prawidłowo reprezentowane,
 - czy model jest poprawnie zakodowany.
- ❑ Walidacja – czy zbudowano poprawny model:
 - czy model dokładnie opisuje rzeczywisty system?
- ❑ Cztery możliwe sytuacje:
 - Słuszny i zweryfikowany,
 - Niesłuszny i zweryfikowany (model prawidłowo odwzorowuje założenia, które jednak są dalekie od rzeczywistych),
 - Słuszny i niezwyfikowany (założenia są właściwe, ale źle oprogramowano model),
 - Niesłuszny i niezwyfikowany.

Weryfikacja i walidacja modelu

Techniki weryfikacji

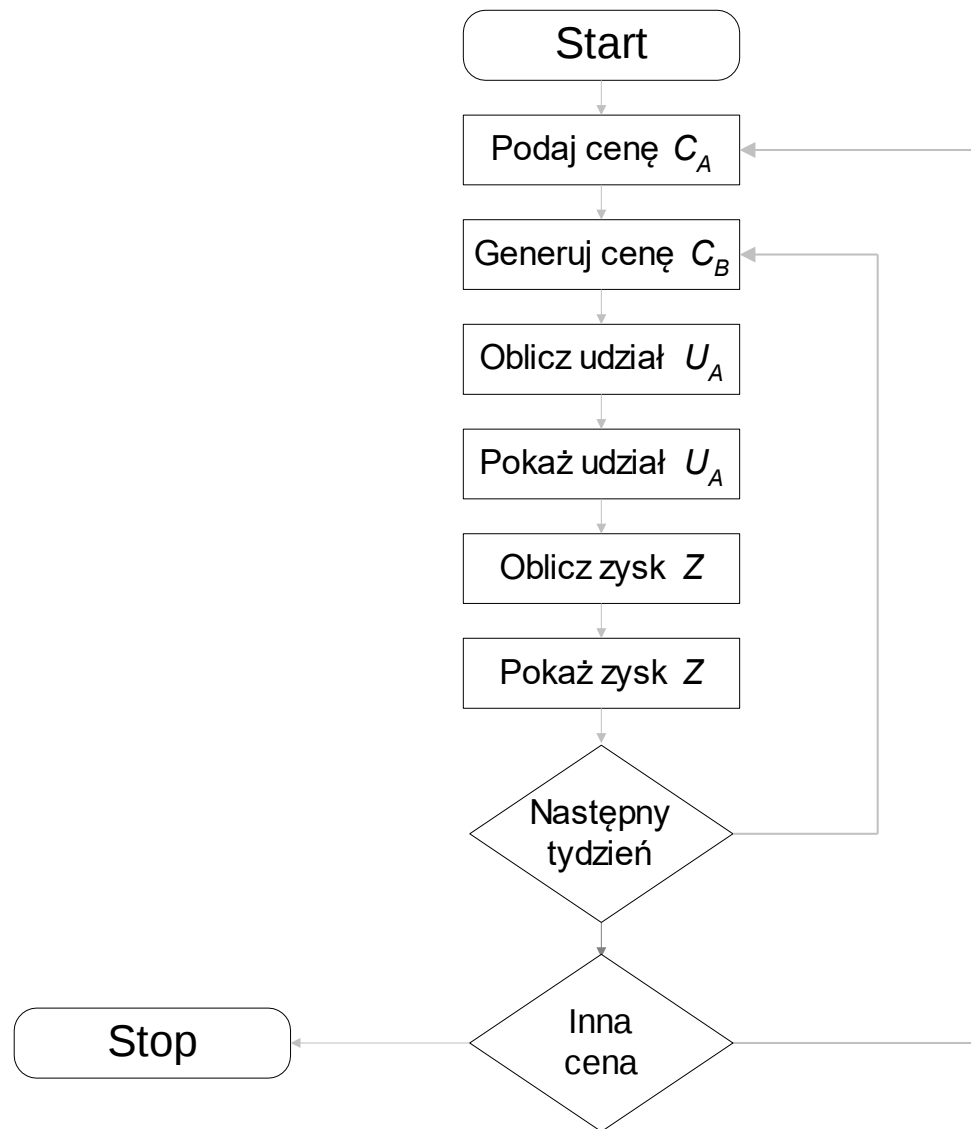
- ❑ Techniki programistyczne: właściwe projektowanie (np. top-down), podejście strukturalne, obiektowe, analiza fragmentów kodu, śledzenie wykonania.
- ❑ Prowadzenie eksperymentu:
 - Zablokowanie losowości,
 - Obliczenia dla uproszczonych przypadków,
 - Test ciągłości: małe zmiany na wejściu powodują małe zmiany na wyjściu,
 - Testy graniczne: dla granicznych wartości założonych parametrów.

Weryfikacja i walidacja modelu

Techniki walidacji

- ❑ Należy zbadać prawidłowość:
 - Przyjętych założeń,
 - Wartości i rozkładów parametrów wejściowych,
 - Wartości i rozkładów danych wyjściowych.
- ❑ Stosując:
 - Ocenę ekspercką,
 - Porównanie z rzeczywistymi rezultatami,
 - Analizę teoretyczną.

Przykład – wykonanie symulacji



Przykład – wykonanie symulacji

- ❑ Prowadzimy symulację przez np. 20 tygodni dla cen firmy A zmieniających się co 100 zł (4100, 4200, ..., 4900). Razem daje to 9 przebiegów symulacyjnych.
- ❑ W każdym przebiegu:
 - generujemy cenę firmy B z przyjętego rozkładu,
 - obliczamy udział firmy A w rynku,
 - obliczamy zysk tygodniowy,
 - kumulujemy zysk.

Przykład – wykonanie symulacji

□ Symulowane ceny firmy B:

Tydzień	Liczba losowa	Symulowana cena B
1	0,44	4 600
2	0,12	4 300
3	0,54	4 700
4	0,78	4 800
5	0,02	4 200
6	0,90	4 800
7	0,74	4 700
8	0,57	4 700
9	0,63	4 700
10	0,37	4 600
11	0,20	4 400
12	0,66	4 700
13	0,81	4 800
14	0,13	4 300
15	0,32	4 500
16	0,22	4 400
17	0,28	4 500
18	0,32	4 500
19	0,01	4 200
20	0,26	4 500
Średnia	0,41	4 545

Przykład – wykonanie symulacji

Tydzień	Cena B	Udział A	Zysk A	Skumulowany zysk
1	4 600	0,45	900	900
2	4 300	0,42	840	1 740
3	4 700	0,46	920	2 660
4	4 800	0,47	940	3 600
5	4 200	0,41	820	4 420
6	4 800	0,47	940	5 360
7	4 700	0,46	920	6 280
8	4 700	0,46	920	7 200
9	4 700	0,46	920	8 120
10	4 600	0,45	900	9 020
11	4 400	0,43	860	9 880
12	4 700	0,46	920	10 800
13	4 800	0,47	940	11 740
14	4 300	0,42	840	12 580
15	4 500	0,44	880	13 460
16	4 400	0,43	860	14 320
17	4 500	0,44	880	15 200
18	4 500	0,44	880	16 080
19	4 200	0,41	820	16 900
20	4 500	0,44	880	17 780

Przykład – wykonanie symulacji

Lp	Cena A	Skumulowany zysk
1	4 100	17 780
2	4 200	34 760
3	4 300	50 580
4	4 400	64 880
5	4 500	77 300
6	4 600	86 760
7	4 700	93 380
8	4 800	95 360
9	4 900	92 880

- Zgodnie z wynikami zaprezentowanymi w tabeli, spośród zbadanych cen, 4800 zł/sztukę prowadzi do największego skumulowanego zysku.
- Jako że cena B jest opisana rozkładem, decydent powinien przeprowadzić kilkadziesiąt dłuższych eksperymentów (np. 52 tygodnie) i zanalizować średnią oraz wariancję zysku.

Przykład – wykonanie symulacji

Lp	Cena A	Skumulowany zysk	Odch.st.
1	4 100	17 962,40	203,33
2	4 200	35 158,40	345,35
3	4 300	51 271,20	586,12
4	4 400	65 964,80	900,99
5	4 500	78 780,00	2 169,68
6	4 600	90 877,60	3 691,47
7	4 700	98 683,20	3 809,12
8	4 800	100 768,00	5 650,63
9	4 900	100 454,40	5 262,74

Przydatne miary statystyczne

- ❑ Średnia arytmetyczna
- ❑ Mediana, modalna
- ❑ Estymator wariancji
- ❑ Skośność rozkładu

$$A_m = 3 \frac{\mu - m}{s}$$

- ❑ Kurtoza rozkładu

$$\text{Kurt} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4}{\sigma^4} - 3$$

- ❑ Przedział ufności dla wartości oczekiwanej:

$$P\left\{\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}} < m < \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n-1}}\right\} = 1 - \alpha$$

- ❑ W przypadku odpowiednio licznej próby ($n > 30$):

$$P\left\{\bar{X} - u_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{X} + u_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

Przedział ufności

- W naszym przykładzie, dla $\alpha=0,05$ (95% przedział ufności):

Lp	Cena A	Skumulowa ny zysk	Odch.st.	Przedział ufności	
1	4 100	17 962,40	203,33	17 889,64	18 035,16
2	4 200	35 158,40	345,35	35 034,82	35 281,98
3	4 300	51 271,20	586,12	51 061,46	51 480,94
4	4 400	65 964,80	900,99	65 642,39	66 287,21
5	4 500	78 780,00	2 169,68	78 003,59	79 556,41
6	4 600	90 877,60	3 691,47	89 556,62	92 198,58
7	4 700	98 683,20	3 809,12	97 320,12	100 046,28
8	4 800	100 768,00	5 650,63	98 745,95	102 790,05
9	4 900	100 454,40	5 262,74	98 571,15	102 337,65

Przedział ufności i kryterium stopu

- Przyjmijmy, że szacowanym parametrem jest średnia wartość wskaźnika jakości. Chcemy zbudować przedział ufności dla tego wskaźnika, którego długość nie przekroczy pewnej zadanej wielkości Φ . Ile eksperymentów symulacji należy przeprowadzić, by spełniony był ten warunek?
- Z faktu, że średnia z próby ma w przybliżeniu rozkład

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

wynika, że liczbę eksperymentów n^* , które należy wykonać, by przedział ufności miał długość nie większą niż Φ można określić, korzystając z następującego wzoru:

$$n^* = \left(z_{(1-\alpha/2)}\right)^2 \frac{\sigma^2}{(\Phi/2)^2}$$

Przedział ufności i kryterium stopu

- Podczas eksperymentu symulacyjnego nie znany jednak końcowej wartości wariancji zmiennej losowej. Wyjście?
- Przypuśćmy, że w naszym przykładzie dla ceny $C_A=4100$ przedział ufności dla średniej zysku nie powinien być większy niż 100.
- W pierwszym etapie przeprowadzono 30 eksperymentów i uzyskano następujące wyniki:
 $Z_{\text{sr}} = 17962,4$ i $O_{\text{st}} = 203,33$ czyli
$$n^* = (1,96)^2 * (203,33^2 / (100/2)^2) = 63,5$$
- W następnym etapie przeprowadzono dodatkowo 34 eksperymenty i otrzymano:
 $Z_{\text{sr}} = 17951,3$ i $O_{\text{st}} = 195,15$ czyli tym razem minimalna wielkość próby wynosi $n^* = 57,5$.

Analiza wariancji

- Analiza wyników obejmuje przede wszystkim analizę wariancji dla wielu średnich. Testy te pozwalają na sprawdzenie, czy pewne czynniki regulowane w trakcie eksperymentu (tu: cena A) wywierają wpływ, a jeśli tak, to jaki, na kształtowanie się średnich wartości badanych cech (tu: zysk). W naszym przypadku powinniśmy przeprowadzić tzw. klasyfikację pojedynczą mierzącą wpływ pojedynczego czynnika.

Analiza wyników – analiza wariancji

- Analiza wariancji opiera się na rozkładzie estymatorów wariancji wokół prawdziwych wariancji z populacji normalnych. Istotą analizy wariancji jest rozbicie na addytywne składniki sumy kwadratów wariancji całego zbioru wyników. Porównanie wariancji wynikającej z działania danego czynnika oraz wariancji resztowej (mierzącej losowy błąd) daje odpowiedź, czy dany czynnik odgrywa istotną rolę w kształtowaniu się wyników eksperymentu.

Analiza wariancji

□ Klasyfikacja pojedyncza

Sumę kwadratów wariancji ogólnej rozбивa się na dwa składniki mierzące zmienność między grupami i wewnątrz grup (resztową). Porównując te wariancje testem F rozstrzygamy, czy średnie grupowe różnią się istotnie od siebie czy nie. Jeśli podział na grupy przebiegał ze względu na różne poziomy badanego czynnika, to można wykryć w ten sposób wpływ poziomu na wartość badanej cechy.

Analiza wariancji

□ Klasyfikacja pojedyncza

Danych jest k populacji normalnych $N(m_i, \sigma_i)$, $i=1, \dots, k$. Wariancje wszystkich populacji są równe (nie muszą być znane). Z każdej z tych populacji wylosowano niezależnie próby o liczebności n_i . Wyniki prób oznaczone są x_{ij} ($j=1, \dots, n_i$), przy czym $x_{ij}=m_i+e_{ij}$, gdzie e_{ij} jest wartością zmiennej losowej nazywanej składnikiem losowym o rozkładzie $N(0, \sigma)$.

- $H_0: m_1=m_2=\dots=m_k$ wobec H_1 : nie wszystkie średnie są równe

Analiza wariancji

□ Klasyfikacja pojedyncza

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \tilde{x})^2 n_i$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

$$F = \frac{\tilde{S}^2}{\hat{S}^2}$$

Jeśli $F \geq F_{\alpha}$, to hipotezę o równości średnich w badanych populacjach należy odrzucić, co oznacza udowodnienie istotnego wpływu poziomego czynnika na te populacje.

Analiza wariancji

- ❑ Jeśli odrzucono hipotezę H_0 (czyli przyjęto hipotezę alternatywną H_1 stwierdzającą, że przynajmniej jedna średnia różni się istotnie od pozostałych) należy w dalszym etapie analizy wyników zastosować testy porównań wielokrotnych, tzw. testy **post hoc** (badanie istotności różnic między wartościami średnimi dla wszystkich par czynnika). Najpopularniejsze to test **NIR** (Najmniejszych Istotnych Różnic) i test **Tukeya**. NIR to w zasadzie wielokrotne stosowanie testu t do porównania par średnich.
- ❑ Jeśli chcemy zbadać wpływ poziomu dwóch czynników stosujemy klasyfikację podwójną.

Przykład – analiza wyników

- W celu określenia, czy wyniki istotnie różnią się od siebie należy sprawdzić hipotezę, że średnie wartości uzyskanych rozwiązań są jednakowe, wobec hipotezy alternatywnej, że średnia wartość zysku Z_i otrzymana przy cenie C_i jest mniejsza (większa) niż średnia Z_j otrzymana przy cenie C_j :

$$H_0: Z_i = Z_j \quad \text{ i } \quad H_1: Z_i < Z_j.$$

- Jeśli nie są znane odchylenia standardowe obserwowanej zmiennej w obu zbiorowościach i próby są duże, to sprawdzianem hipotezy H_0 może być wyrażenie:

$$Z = \frac{\bar{Z}_i - \bar{Z}_j}{\sqrt{\frac{s_i^2 + s_j^2}{l}}}$$

- Statystyka Z ma rozkład normalny $N(0,1)$. Hipotezę H_0 sprawdzano przy poziomie istotności $\alpha=0,01$, dla którego $z_\alpha=-2,33$ (przy lewostronnym obszarze krytycznym).

Przykład – analiza wyników

Cena A	4 200	4 300	4 400	4 500	4 600	4 700	4 800	4 900
4 100	-210,21	-263,03	-254,60	-136,72	-96,62	-103,67	-71,74	-76,73
4 200		-116,03	-156,41	-97,27	-73,62	-81,37	-56,78	-60,65
4 300			-66,97	-59,96	-51,91	-60,27	-42,68	-45,50
4 400				-26,72	-32,12	-40,95	-29,80	-31,65
4 500					-13,84	-22,24	-17,80	-18,65
4 600						-7,21	-7,18	-7,30
4 700							-1,50	-1,34
4 800								0,20

Metody redukcji wariancji

- Znane są różne metody zmniejszania nakładu pracy (liczby eksperymentów) niezbędnego do osiągnięcia danego poziomu ufności wyników. Jeśli wykona się n niezależnych obserwacji pewnej wielkości, której odch. stand. jest równe σ , to błąd standardowy średniej tych obserwacji wyniesie $\sigma/n^{1/2}$. Jeśli wykonamy dwa warianty eksperymentu powtarzając je n_1 i n_2 razy, ich wyniki mają odch. stand. σ_1 i σ_2 , to jednakową dokładność otrzymamy gdy $\sigma_1/n_1^{1/2} = \sigma_2/n_2^{1/2}$ czyli $n_1/n_2 = s_1^2/s_2^2$.
- Ogólnie: *jeśli pewien rodzaj eksperymentu redukuje wariancję k -krotnie, to liczbę powtórzeń można zmniejszyć również k -krotnie.*

Metody redukcji wariancji

❑ Powtarzanie ciągów liczb losowych

Celem symulacji jest zazwyczaj porównanie różnych możliwości. W takim przypadku eksperymentator powinien odtwarzać i ponownie używać tego samego ciągu zdarzeń do różnych przebiegów (ciąg taki jest funkcją liczb pseudolosowych). W ten sposób uzyskuje pożądane wyniki za pomocą znacznie mniejszej próbki, niż gdyby generował niezależne ciągi w każdym przebiegu.

Metody redukcji wariancji

Nr eksp	Różne ciągi liczb losowych				Te same ciągi liczb losowych			
	Z/4800	Wariancja	Z/4100	Wariancja	Z/4800	Wariancja	Z/4100	Wariancja
1	5 240		899		5 240		906	
2	4 896	59 168	890	41	4 896	59 168	893	85
3	4 896	39 445	894	20	4 896	39 445	893	56
4	5 104	28 475	882	52	5 104	28 475	901	41
5	5 152	24 141	907	88	5 152	24 141	904	37
6	5 328	31 499	883	92	5 328	31 499	908	42
7	5 224	28 352	900	85	5 224	28 352	904	37
8	4 912	29 710	892	73	4 912	29 710	895	36
9	5 272	29 516	901	70	5 272	29 516	907	36
10	5 040	26 781	892	63	5 040	26 781	899	33
11	5 008	24 983	893	57	5 008	24 983	898	30
12	5 480	34 907	899	54	5 480	34 907	912	38
13	4 992	33 449	906	60	4 992	33 449	896	38
14	5 224	31 667	903	60	5 224	31 667	907	37
15	5 288	31 148	907	64	5 288	31 148	906	36
Średnia	5 106	31 148	894	64	5 106	31 148	901	36

Metody redukcji wariancji

- Ciągi przeciwnie liczb losowych $R'=1-R$

W tym przypadku eksperymentator wykonuje przebiegi parami korzystając z ciągu liczb losowych i ciągu doń przeciwnego. Następnie należy obliczyć średnie par jako wyniki eksperymentu. Metoda ta zwykle kilkukrotnie zmniejsza koszt obliczeń w porównaniu do użycia ciągów zupełnie niezależnych liczb losowych.

Metody redukcji wariancji

Tydzień	R	Cena B1	Udział A1	Zysk A1	1-R	Cena B2	Udział A2	Zysk A2	Sr. zysku
1	0,48	4 600	0,32	5 120	0,52	4 700	0,36	5 760	5 440
2	0,25	4 500	0,28	4 480	0,75	4 700	0,36	5 760	5 120
3	0,01	4 100	0,12	1 920	0,99	4 900	0,41	6 560	4 240
4	0,82	4 800	0,40	6 400	0,18	4 400	0,24	3 840	5 120
5	0,41	4 600	0,32	5 120	0,59	4 700	0,36	5 760	5 440
6	0,13	4 400	0,24	3 840	0,87	4 800	0,40	6 400	5 120
7	0,56	4 700	0,36	5 760	0,44	4 600	0,32	5 120	5 440
8	0,10	4 300	0,20	3 200	0,90	4 800	0,40	6 400	4 800
9	0,43	4 600	0,32	5 120	0,57	4 700	0,36	5 760	5 440
10	0,30	4 500	0,28	4 480	0,70	4 700	0,36	5 760	5 120
11	0,64	4 700	0,36	5 760	0,36	4 500	0,28	4 480	5 120
12	0,48	4 600	0,32	5 120	0,52	4 700	0,36	5 760	5 440
13	0,88	4 800	0,40	6 400	0,12	4 300	0,20	3 200	4 800
14	0,41	4 600	0,32	5 120	0,59	4 700	0,36	5 760	5 440
15	0,45	4 600	0,32	5 120	0,55	4 700	0,36	5 760	5 440
16	0,78	4 800	0,40	6 400	0,22	4 400	0,24	3 840	5 120
17	0,04	4 200	0,16	2 560	0,96	4 900	0,41	6 560	4 560
18	0,79	4 800	0,40	6 400	0,21	4 400	0,24	3 840	5 120
19	1,00	4 900	0,41	6 560	0,00	4 100	0,12	1 920	4 240
20	0,63	4 700	0,36	5 760	0,37	4 600	0,32	5 120	5 440
Średnia	0,48	4 590		5 032	0,52	4 615		5 168	5 100
Wariancja				1 717 827				1 573 996	151 495

Metody redukcji wariancji

Nr eksp.	Zysk1	Wariancja	War. sr.	Zysk2	Wariancja	War. sr.	Sr. zysk	Wariancja	War. sr.
1	4 880	1 408 000		5 264	1 662 383		5 072	58 206	
2	5 072	1 121 280	18 432	5 192	1 224 691	2 592	5 132	62 838	1 800
3	5 072	1 293 743	12 288	5 104	1 791 731	6 421	5 088	105 364	965
4	5 304	1 520 573	30 096	4 776	2 118 804	46 443	5 040	113 179	1 465
5	5 040	1 569 684	22 925	5 096	1 725 373	34 861	5 068	149 069	1 144
6	4 800	1 185 684	30 816	5 472	1 313 954	52 670	5 136	69 794	1 438
7	5 248	1 060 648	32 594	4 928	909 743	50 974	5 088	20 480	1 198
8	5 184	2 135 309	29 878	4 824	2 218 509	54 560	5 004	131 015	1 933
9	5 184	1 332 278	27 463	5 136	692 278	48 064	5 160	74 442	2 430
10	5 232	1 606 333	26 511	4 840	1 859 032	48 874	5 036	66 341	2 426
11	5 464	1 410 088	35 799	4 720	1 666 695	54 694	5 092	84 396	2 191
12	4 968	1 442 964	34 856	5 256	1 081 331	53 904	5 112	81 448	2 061
13	5 352	1 410 627	36 068	4 688	1 962 038	59 529	5 020	98 274	2 221
14	5 040	1 742 147	33 986	5 040	1 742 147	54 971	5 040	140 126	2 168
15	5 104	1 360 573	31 609	5 096	1 466 678	51 390	5 100	73 347	2 046
16	4 880	1 451 116	33 395	5 272	1 725 912	51 661	5 076	96 657	1 910
17	5 376	793 331	35 346	5 120	1 034 779	48 772	5 248	36 648	3 471
18	4 896	1 175 983	36 293	5 416	814 552	53 407	5 156	47 478	3 517
19	5 368	1 060 312	37 608	4 896	1 822 720	52 013	5 132	92 480	3 403
20	5 016	2 170 004	36 275	4 976	1 899 520	49 627	4 996	114 846	3 711
21	4 960	1 029 389	35 742	5 416	426 509	53 331	5 188	65 533	3 985
22	4 968	1 098 038	35 038	5 312	1 168 438	53 393	5 140	64 589	3 889
23	4 728	1 825 617	39 772	5 296	1 845 625	52 926	5 012	56 775	4 023
24	5 280	727 579	39 501	5 152	882 796	50 771	5 216	54 973	4 480
25	4 880	1 709 811	39 803	5 304	1 736 152	50 397	5 092	122 122	4 295
26	4 808	1 645 069	41 310	5 360	1 472 674	50 908	5 084	77 794	4 130
27	5 000	1 301 221	39 964	5 384	1 113 667	51 659	5 192	65 280	4 304
28	5 224	1 585 246	39 245	4 936	1 582 552	51 002	5 080	98 695	4 160
29	4 936	935 815	38 590	5 448	1 116 901	52 962	5 192	100 312	4 303
30	5 352	1 065 701	39 761	4 992	1 103 764	51 755	5 172	62 164	4 313
Średnia	5 080	1 347 032	36 998	5 154	1 383 272	52 454	5 117	81 697	3 429